



人民长江

Yangtze River

ISSN 1001-4179, CN 42-1202/TV

## 《人民长江》网络首发论文

题目: 水文测验中两种测速垂线精简算法比较研究  
作者: 魏玲娜, 金字斌, 王文, 程嘉宏  
收稿日期: 2019-11-21  
网络首发日期: 2019-12-27  
引用格式: 魏玲娜, 金字斌, 王文, 程嘉宏. 水文测验中两种测速垂线精简算法比较研究. 人民长江. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1202.TV.20191227.0951.002.html>



**网络首发:** 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认:** 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

# 水文测验中两种测速垂线精简算法比较研究

魏玲娜<sup>1,2</sup>, 金字斌<sup>1</sup>, 王文<sup>2</sup>, 程嘉宏<sup>3</sup>

(1. 南京信息工程大学 水文与水资源工程学院, 江苏 南京 210044; 2. 河海大学 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098; 3. 安徽省黄山水文水资源局, 安徽 黄山 245000)

**摘要:** 随着中小河流治理项目推进, 改革水文测验方式, 探索测流方式方法技术创新势在必行。本研究依托南京信息工程大学学生水文测验教学实习过程中组织开展的两次测速垂线优化精简实验, 收集了渔梁水文站两次多测速垂线流量测验数据, 针对原精简算法在流量误差最小的寻优过程中可能删去最有代表性的垂线这一问题, 设计了直接寻求流量误差最小的测速垂线组合的新的算法, 深入分析两种精简算法对流量误差的影响, 结果表明: 测站目前采用的常测法选取的 13 根固定垂线代表性较好, 流量测验精度较高; 对比原算法, 新的垂线精简算法在相同垂线数目下, 流量误差更小, 测验精度更高; 由新算法, 特殊水情下单垂线测流可考虑将垂线位置布设在起点距 84m 处; 流量相对误差大小随着优选垂线数量的增加呈指数递减规律。本研究垂线精简算法有助于提高实验的精度, 可为基层水文站开展垂线精简分析工作, 进行测流方式改革提供参考。

**关键词:** 测速垂线精简; 算法比较; 流量误差; 实验研究; 水文测验实习

**中图分类号:** TV123 + G642.44

**文献标识码:** A

## Research on the Comparison between Two Reduction Algorithms of Vertical Lines of Velocity Measuring during the Hydrometry Practice

WEI Lingna<sup>1,2</sup>, JIN Yubin<sup>1</sup>, WANG Wen<sup>2</sup>, CHENG Jiahong<sup>3</sup>

(1. School of Hydrology and Water Resources, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China; 2. State Key Laboratory of Hydrology Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 3. Huangshan Bureau of Hydrology and Water Resources in Anhui Province, Huangshan 245000, China)

**Abstract:** With the progress of the medium and small river management projects, it is imperative to reform the way of hydrometry and explore the technological innovation of the flow measurement method. Thus, two experiments for velocity measuring vertical line optimizing and simplifying were implemented during hydrometry practice for hydrometeorology undergraduates of Nanjing University of Information Science and Technology in this study. The measuring velocity data of multi-vertical lines during the two experiments in Yuliang hydrologic station were collected. As the original reduction algorithm is likely to omit the most representative vertical line when we are searching the optimal flow error. Then the other new algorithm was designed to directly search the vertical lines of the minimal flow error. We further analyzed the impacts of the

收稿日期: 2019 - 11 - 21;

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(51909121); 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室“一带一路”水与可持续发展科技基金(2018490311, 2018491711)

作者简介: 魏玲娜, 讲师, 博士, 研究方向为水文气象、流域水文循环。E-mail: weilingna@nuist.edu.cn



two algorithms on flow errors. Our conclusions are as follows. 13 vertical lines selected as the constant velocity measuring method is proofed to be well representative. They could be used to calculate discharge with high accuracy in current survey. Using the same number of vertical lines, the flow errors of the latter algorithm are smaller, compared to the original reduction algorithm. According to the results of the new algorithm, the single vertical line located at 84m apart from the starting point may be considered as a simple scheme for single vertical line flow measurement in the case of specific hydrologic circumstance. The flow relative error presents an obvious exponential decreased tendency as the increase of the selected vertical lines. The reduction algorithm of this research is beneficial to enhance the accuracy of experiment. Our results offer reference for the daily work of vertical lines reduction and the reformation of flow measuring way for the basic hydrologic stations.

**Key words:** reduction of vertical lines of velocity measuring; comparison of algorithms; flow error; research through experiments; hydrometry practice

水文测验是一切水文工作的基础,它提供了一切水文工作都不可或缺的水文数据。水文测验业务工作教学实习是水文高等教育的技能培训与实验创新能力培养的重要环节。通过到水文站实习,使学生了解测站与流域概况,掌握水文观测的基本方法,进行降水量、蒸发量、水位、流量、含沙量等项目的观测计算,掌握水尺零点高程的接测与大断面的测量及计算。实习过程中设计了流速脉动变化规律和测速垂线精简对流量误差影响两大实验研究。其中,测速垂线精简实验通过多测速垂线施测流量,进行有限测速垂线数的流量误差分析,利于学生掌握测速垂线精简分析的方法和思路<sup>[1]</sup>。

不同于水位、降水观测,流量测验因其工作模式的复杂性在自动化测报技术中发展相对滞后。借鉴发达国家水文测验工作模式和运行机制,积极推进水文测验方式改革,改善常年累月驻守在偏僻水文测站职工的工作条件一直是水利行业关注的焦点<sup>[2]</sup>。近年来中小河流治理建设项目使得全国水文测验任务成倍增长,探索流量测验方式方法技术创新势在必行。为此,专家学者们围绕流量计算方法(模型)<sup>[3,4]</sup>,在线测流方案<sup>[5,6]</sup>,先进测流仪器应用<sup>[7]</sup>等方面展开深入研究。传统缆道流速仪测流仍是目前国内流量测验工作的主要方法,即在测流断面上设置若干条测速垂线,用自动/手摇缆道在各垂线上用流速仪测定不同水深处的点流速,据此计算各垂线平均流速,进而推算断面流量<sup>[4]</sup>。该方法在实施过程中测速垂线数量越多,计算的流量越精确,但耗费的时间却越多,增加了测验人员负担,同时也削减了流

量数据的瞬时特性。因此有必要开展实验研究,探索测速垂线数目和流量计算精度之间的最优组合,通过采用一定的测速垂线精简算法,在给定流量计算结果精度下,寻找最优的测速垂线组合。

本文利用2019年7月3日~18日南京信息工程大学大气科学(水文气象方向)专业学生在黄山市歙县渔梁水文站进行水文测验在站业务实习过程中开展的两次测速垂线精简对流量误差影响的实验,对不同的精简算法优选垂线计算的流量误差结果进行比较。利用所设计的新的优选算法探索了优选垂线数与测流误差之间的关系。通过教学实习与实验研究不仅开发了有助于提高垂线精简实验精度的算法,为基层测站业务工作提供参考,同时也达到了提高学生实践与创新能力的目标。

## 1 水文站概况

练江为钱塘江流域新安江的一级支流,发源于杨子水上游绩溪县黄花箭西麓,河流水系呈扇形,同布射水、富之水、丰乐水汇集于歙县后成为练江。歙县渔梁水文站(118° 26' 11" E, 29° 51' 39" N)设于1952年,位于练江渔梁坝上游,控制流域面积1599 km<sup>2</sup>。流域北边界为新安江与长江流域的分水岭,东北部以天目山脉为分水岭,自北向南由崇山峻岭的峡谷山地进入盆地状平原,平均海拔378m,平均坡度13.6°<sup>[8]</sup>。属亚热带季风气候,四季分明,雨量丰沛,年均气温17℃左右,年降水量约1600 mm,分配不均匀。土壤以红壤分布最广,兼有黄壤和水稻土<sup>[9]</sup>。土地利用类型以次生林、人工用材林和经济林林地为主,

耕地次之。自然植被多为亚热带常绿阔叶林<sup>[10]</sup>。渔梁水文站测验河段顺直, 河床左岸为岩石, 右岸为沙土及卵石, 呈宽浅 U 型河道, 冲淤变化小。实测多年平均水位 110.41m, 最低、最高水位变幅为 109.04~120.74m; 多年平均流量 45.6m<sup>3</sup>/s, 变幅为 0.007~6630 m<sup>3</sup>/s; 实测历年最高流速 5m/s, 发生在 1969 年 7 月 5 日。受下游约 800 米处的宽顶堰坝(渔梁坝)影响, 中、低水断面控制良好, 高水期若遇新安江出现特大洪水时, 受回水顶托影响。

对应不同的水位级渔梁站常测法流量测验采用不同的方案。低水时(水位 111.01~113.01m), 采用缆道流速仪常测法, 利用 13 条固定垂线、相对水深 0.6m 处一点法测速, 垂线位置如图 1 所示; 中水时(水位 113.01~117.01m), 若缆道流速仪常测法不能使用, 则采用 2 条垂线流速仪水面 1 点法进行测流, 垂线起点距 100m、120m; 高水时(水位超过 117.01m), 中水测流方法无法使用时, 采用比降-面积法。

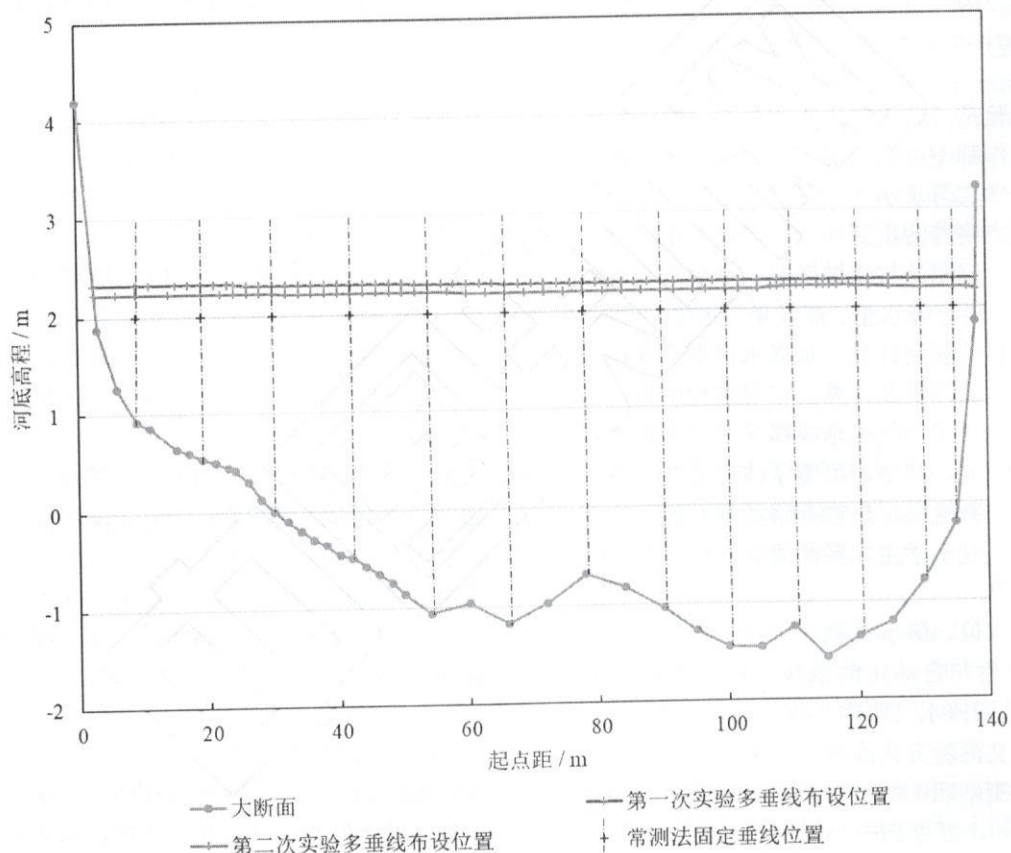


图 1 渔梁站常规流量测验与实验的垂线布设位置

Fig.1 Locations of vertical lines during the routine survey in hydrology and two experiments

## 2 垂线精简实验方案

为了以本站常用的缆道流速仪常测法流量测验结果为参照, 垂线精简实验选择在中低水水情条件下开展。在流量变化较缓慢的平水时期, 根据实测大断面图选定多垂线(数目>50 条)测验方案进行实验。测速时为减少总测流历时, 各垂线测速全部采用一点法, 每测点测速历时不小于 100s。由于实验耗时较长, 实验过程中通常依据

全体成员分组情况, 将全断面分为若干部分, 各小组施测其中一部分。利用所有的测速垂线计算断面流量  $Q_n$ ; 利用常测法固定垂线的流速计算断面流量  $Q_0$ , 与  $Q_n$  比较, 计算相对误差。

利用 Ls25-1 旋桨式流速仪与渔梁站过河测流缆道, 于 2019 年 7 月 6 日 8: 10—14: 51, 2019 年 7 月 16 日 8: 17—14: 30 共进行两次实验, 每次实验 35 名同学分三组分别施测 54 根和 52 根垂



线上相对水深 0.6 处的流速, 期间水位变幅分别为 111.33~111.30m 与 111.24~111.19m, 均处于低水状态, 测验的过水断面和垂线位置如下图 1 所示。

根据《水文测验手册》, 为获得常测法的测速垂线精简方案需满足算得流量与精测流量误差值满足: 累计频率到达 75% 的误差绝对值在 3% 以内, 累计频率到达 95% 的在 5% 以内, 系统误差绝对值在 1% 以内, 同时面积误差在 3% 以内<sup>[1]</sup>。根据 GB 50179-2015《河流流量测验规范》, 测流方案实行应在高、中、低不同水位或流量级别下均匀布置不少于 30 次的比测实验<sup>[12]</sup>。由于实习时间有限, 仅通过两次实验无法满足实际工作中垂线精简分析所需条件, 为了进行算法比较, 借鉴文献[1]统一以流量相对误差绝对值小于 5% 为标准。两次实验过程过水断面面积计算均以实习期间实测的大断面资料为基础。

## 2.1 原有垂线精简算法

原有的算法通过计算机编程, 将测速垂线一条一条精简, 其原则是精简后的计算流量  $Q_{n-1}$  与多垂线流量  $Q_n$  之间的相对误差绝对值小于 5%, 具体算法如下<sup>[1]</sup>:

(1) 第一次精简, 从  $n$  条测速垂线中任意精简一条, 设为第  $i$  条,  $i=1, 2, 3, \dots, n$ , 即有  $n$  种精简方式; 精简后的计算流量为  $Q_{n-1}^i$ , 有  $n$  个, 计算每个与  $Q_n$  之间的相对误差  $\delta_{Q_n^i}$ 。

(2) 从  $n$  个中找出  $\delta_{Q_n^i}$  中最小的那个相对误差  $\text{Min}(\delta_{Q_n^i})$ , 如果选出的最小相对误差的绝对值小于 5%, 则相应的  $i$  即为此次精简的垂线。

(3) 从剩下的  $n-1$  条测速垂线中再精简一条, 重复 (1) 和 (2), 直到精简后不能满足  $|\text{Min}(\delta_{Q_n^i})| < 5\%$  结束, 这时所保留的测速垂线即是所要求的精简后的测速垂线。

## 2.2 新的垂线优选算法

考虑到原有算法以精简后的流量误差最小为原则, 逐条进行精简, 计算过程中不可避免地存在删去最优测速垂线的可能性, 为此, 本研究以直接寻找流量误差最小的测速垂线组合为目标, 利用 Matlab 编写程序, 进行多垂线优选, 新的算法如下:

(1) 假设最终精简后剩余垂线的数目  $m$ , 对于  $n$  条多垂线即存在  $C_n^m$  种可能方式, 分别计算这

$C_n^m$  种方式下的流量与多垂线流量  $Q_n$  之间的相对误差, 找出绝对值最小者; 若  $|\text{Min}(\delta_{Q^i})| < 5\%$ , 则说明第  $i$  种组合方式的垂线为优选出的精简垂线。

(2) 若找到的最小相对误差不满足  $|\text{Min}(\delta_{Q^i})| < 5\%$ , 则精简后的剩余垂线数目增大为  $m+1$ ; 类似 (1), 存在  $C_n^{m+1}$  种可能组合方式, 分别计算这些组合方式下的流量与多垂线流量间的相对误差, 同样找出绝对值最小, 并判断其是否小于 5%, 若是则该组垂线即为所求的精简后的测速垂线, 否则再增大垂线数目, 取  $m+2$ 。

(3)  $m$  从 1 开始, 2, 3, ..., 依次增加; 随着  $m$  变大, 误差逐渐减小, 直到最小相对误差绝对值小于 0.01% 停止计算。

## 3 实验结果与分析

### 3.1 常测法与多垂线测流结果比较

本站日常测流工作采用的常测法的 13 根固定测速垂线沿河宽方向大致呈均匀分布, 如图 1。利用常测法固定垂线的流速计算断面流量与多垂线流量进行比较, 两次实验的相对误差分别为 -2.22% 和 -1.25%, 如下表 1 所列, 常测法流量计算结果与多垂线流量相比, 误差较小, 说明渔梁站常测法选的 13 根固定的测速垂线代表性好, 测流精度高。

表 1 常测法与多垂线流量结果比较  
Table 1 Comparison of discharge between the routine survey and multi-vertical lines.

	垂线数目/ 根	多垂线流量 /( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	常测法流量 /( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	相对误差 /%
第一次实验	54	128.65	125.79	-2.22
第二次实验	52	103.70	102.41	-1.25

### 3.2 原算法与新算法结果比较

采用原有的算法分别对两次实验的多垂线进行精简, 第一次实验精简结果选出了起点距为 56 和 95m 处两根垂线, 第二次选出了 42、57 和 84m 处三根垂线, 其对应位置如下图 2 示, 大都分布

于靠近河流中心的位置, 精简后的流量相对误差绝对值分别为 2.7% 和 0.5%, 说明精简出的垂线具有代表性, 优选垂线的流量计算结果较为合理。

若在两次实验的水情条件下分别采用这两种方案进行测流, 工作时间可比常测法分别减少 85% 和 77%。

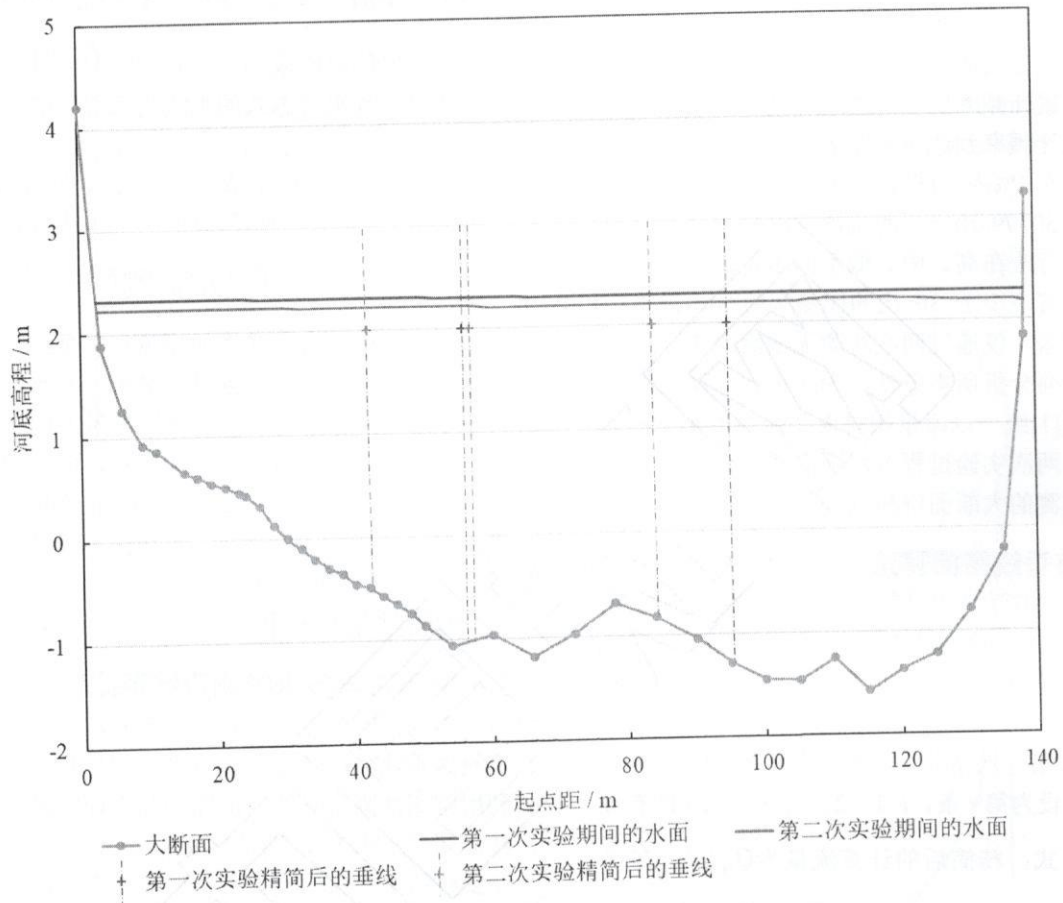


图 2 原算法精简后的垂线位置

Fig.2 Locations of vertical lines devised from the original reduction algorithm

利用新的算法进行垂线优选, 结果如表 2 所列。若只优选一根代表性垂线, 两次实验选出的垂线位置一致, 为起点距 84m 处, 相对误差绝对值分别为 4.14% 和 1.74%, 均小于上文给定的标准 5%。为了进一步说明上述两次实验优选的单根代表性测速垂线(起点距 84m 处)的测流效果, 2019 年 7 月 8 日上午 9:24—9:40 对该垂线相对水深 0.6 处进行流速仪施测流速, 期间水位为 111.12m, 右岸为缓坡, 流速系数取 0.7, 左岸为陡坡取 0.8, 计算得到的断面流量为 81.23m<sup>3</sup>/s。依据近期 2018 年本站水位~流量曲线关系表, 查得该水位对应的流量为 84.4 m<sup>3</sup>/s, 计算单根代表性垂线流量误差为-3.75%, 同样小于 5%。由此说明 84m 处的垂线具备成为渔梁站特殊水情下单

垂线简易测流方法的潜力。由于该方案测流时仅需要测一根垂线的流速, 耗费的工作时间比原精简算法的两根和三根代表性垂线测流更少, 比常测法少 92%, 在 5% 误差许可的前提下大大提高了两次实验的测流效率。

由表 2, 优选垂线数目为 2、3 和 4 时, 尽管对应两次实验筛选出的精简垂线位置并不相同, 但值得注意的是, 随着垂线数目的增加相对误差绝对值快速减小。将垂线数目与相对误差绝对值点绘在半对数刻度坐标系中(如图 3), 可发现两次实验的数据均呈现较好的线性关系。以指数方程形式对垂线数量与相对误差绝对值两者的关系进行拟合, 结果第一次实验的回归方程为  $y=1.2342e^{-3.823x}$ , 第二次实验为  $y=2.736e^{-4.619x}$ ,



$R^2$  均大于 0.98, 拟合效果都比较好, 说明新的垂线精简算法在增加代表性垂线数目时可以快速有效地减小测验误差。随着选取垂线数量加大, 误差按照指数递减数值降低很快, 在垂线数目大于 3 之后, 误差基本衰减完毕, 接近于零。

表 2 新优选算法实验结果

Table 2 Results of two experiments devised from the new-designed reduction algorithm of vertical lines

精简后的垂线数目/根	第一次实验		第二次实验	
	垂线位置/m	相对误差绝对值	垂线位置/m	相对误差绝对值
1	84	4.14E-02	84	1.74E-02
2	48, 105	4.26E-04	54, 92	3.27E-04
3	52, 76, 84	6.83E-06	50, 96, 107	6.55E-06
4	24, 44, 88, 128	4.80E-07	19, 38, 81, 102	1.31E-08

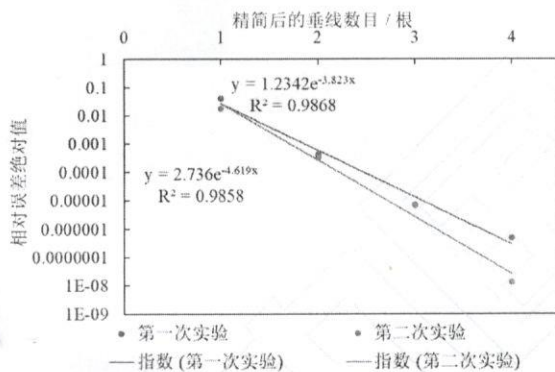


图 3 新算法流量误差与垂线数量之间的关系

Fig. 3 The relation between the discharge error and the number of vertical lines using the new-designed reduction algorithm

进一步对两种算法结果进行比较, 发现用原有算法第一次实验精选出的两根垂线算得的流量误差比新算法优选两根垂线的流量误差放大倍数为  $10^1$  数量级, 而第二次实验同样优选三根垂线误差放大倍数量级更是达到了  $10^2$ 。由此说明同样条件下新的垂线优选算法易于找到误差更小、更有代表性的测速垂线, 比原有的垂线精简算法更优。此外, 在有限的垂线数目下, 因计算量较小, 新的算法可列举所有可能并找到最优; 而当断面垂线数量很大时, 由于新算法计算量随着优选垂线数目的增加急剧增大, 此时应采用遗传算法、粒子群优化等算法求解以加快收敛速度, 提高计算效率。

## 4 结论

本文基于 2019 年 7 月间南京信息工程大学大气科学(水文气象方向)专业学生在黄山市歙县渔梁水文站开展的两次测速垂线精简对流量误差影响的实验数据, 进行垂线精简算法比较研究, 得到结论如下: 渔梁站常测法选用的 13 根固定测速垂线代表性较好, 流量测验精度较高; 对比原有的垂线精简算法, 新算法在相同垂线数目下, 流量误差更小, 测验精度更高; 两次实验过程中采用新算法优选出的单根垂线(起点距 84m 处)可考虑作为特殊水情下单垂线简易测流的备选方案; 流量相对误差大小随着优选垂线数量的增加呈指数递减规律, 当垂线数目大于 3 后误差接近于 0。

尽管有别于测站垂线精简分析工作, 本研究仅以实习过程中的两次垂线精简实验为依据, 所得的结论仅适用于本次实习实验, 然而通过算法比较, 明确了可减小优化垂线的测流误差, 有助于提高实验精度的新算法的有效性。未来将通过增加实验次数进一步检验上述结果, 依据规范要求对误差结果加以统计分析, 为基层水文站垂线精简分析工作与测流方式改革提供可靠依据。通过实验教学, 使学生在创新思维和实践技能上得到了全面的训练。

## 参考文献:

- [1] 谢悦波. 水信息技术课程指导书[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2010.
- [2] 王俊. 长江水文测验方式方法技术创新的探索与实践[J]. 水文, 2011, 31(S1):1-3.
- [3] 王鸿杰, 张建云, 王兴泽, 等. 基于横断面垂线平均流速分布的流量计算模型研究与应用[J]. 水文, 2019, 39(5):50-54.
- [4] 胡兴艺. 文丘里法在河流流量推算中的应用[J]. 水文, 2019, 39(2):72-75.
- [5] 杜兴强, 沈健, 樊铭哲. H-ADCP 流量在线监测方案在高坝洲的应用与改进[J]. 水文, 2018, 38(6):81-83.
- [6] 郭红丽, 谢悦波, 胡健伟, 熊珊珊, 胡电海, 张真真, 续会勇. 水文站在流量测验方法初探[J]. 水文, 2018, 38(1):41-45.
- [7] 李雨, 袁德忠, 周波. ADCP 在水文测验中的应用及其发展前景[J]. 人民长江, 2013, 44(s2): 35-38.
- [8] 沙健, 路瑞, 续衍雪, 等. 气候变化下的流域面源污染响应模型评估[J]. 环境科学与技术, 2018, 41(6): 181-187.
- [9] 彭博. 降雨空间分布及点面关系研究[D]. 合肥工业大学硕士学位

位论文, 2016.

- [10] 翟晓燕. 变化环境下流域环境水文过程及其数值模拟——以淮河和新安江流域为例[D]. 武汉大学博士学位论文, 2015.

- [11] 水利电力部水利司. 水文测验手册 (第一册, 野外工作) [M]. 北京: 水利出版社, 1975.

- [12] GB50179-93. 河流流量测验规范 [S].





# 获奖证书

队号 B19085116

学校 南京信息工程大学

学生 金宇斌 李微 范瑜轩

指导教师 朱连华

荣获 2019 年第十六届五一数学建模竞赛

二等奖

江苏省工业与应用数学学会

中国矿业大学

徐州市工业与应用数学学会

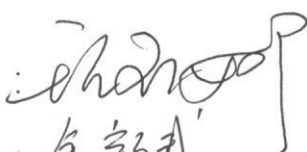
2019 年 6 月

## 证明

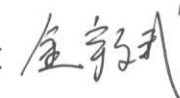
《水文测验中两种测速垂线精简算法比较研究》  
作品/文章是由学生金字斌，学号(20171390027)在  
我指导下完成的。其主要贡献是：原有垂线精简算法问题的发  
现、新算法的提出和计算。

特此证明

指导老师：



学生：



日期：2020年9月24日

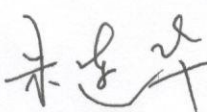
附件：成果首页/证书复印件



## 证明

《考虑多种影响因素下对标枪运动轨迹的预测》 作品/文章是  
由学生 金宇斌 ，学号 (20171390027) 在我指导下完  
成的。其主要贡献是：问题分析、模型建立、编程计算。

特此证明

指导老师：

学生：

日期：2020年9月25日

附件：成果首页/证书复印件